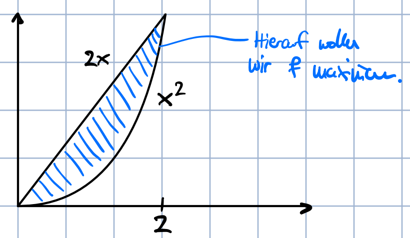
Heute:
- Nachbesprechung Serie 6 Aufgabe 5.
- Zweidimensionale Integrale

→ Satz von Fubini und Integrationsreihenfolge tauschen.

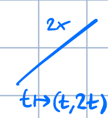
Serie 6 Aufgabe 5



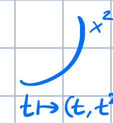
Idee: Wir parametrisieren den Rand mithilfe der gegeben Funktionen. Dann ist das eine eindimensionale Funktion, die wir maximieren können.

Die Parametrisierung sorgt dafür: $t \longmapsto (t, t^2)$ mit $0 \leq t \leq 2$

dass wir uns auf den Randstücken aufhalten.



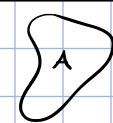
und



Wir suchen also die Extrema von $f(t,2t)$ und von $f(t,t^2)$ mit $0 \leq t \leq 2$.

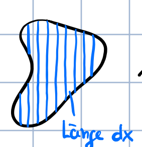
Die beiden Eckpunkte müssen wir einzeln prüfen, weil das die „Ränder" von der eindimensionalen Funktion ist.

DOPPELINTEGRALE: Wir wollen den Inhalt von einer 2D-Fläche berechnen.

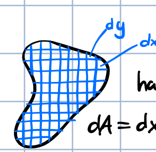


Idee: Man schneidet in dünne 1D-Streifen und summiert diese auf.

Graphisch:



$A = \sum$ Flächeninhalt von $\underset{dx}{\square}$. Nun schneiden wir noch entlang y in kleine Stücke:



Jedes Kästchen hat Flächeninhalt dA

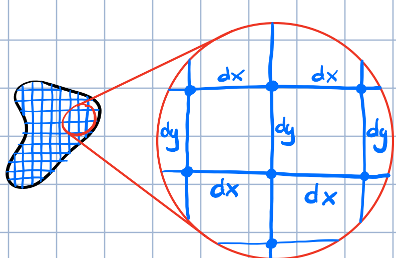
$dA = dx \cdot dy$.

Also: $A = \sum dA = \sum dx\,dy$

Man schreibt: $A = \iint_A dx\,dy$.

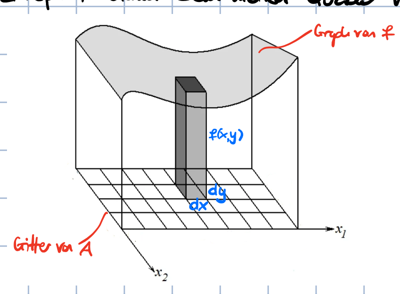
Wenn jetzt noch eine Funktion auf A definiert ist, so berechnen wir das Flächenintegral durch: $A = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$. Das heisst intuitiv: $dx\,dy$ ist so klein, dass f lokal konstant ist! Also ist auf $dx\,dy$ f einfach der aktuelle Funktionswert $f(x,y)$.

Jetzt summiert man das alles auf: $\int_A f\,dA = \iint_A f\,dx\,dy = \sum_{\text{Gitterpunkte}} f(x,y)\,dx\,dy$

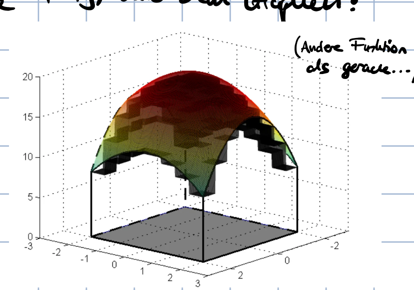


Jedes Quadrat wird „gewichtet" mit $f(x,y)$ an der „Stelle". Weil $dx \cdot dy$ so klein ist wie ein Punkt...

Entspricht dann dem kleinen Quader mit Basis $dA = dx\,dy$ und Höhe $f(x,y)$ unter dem Graphen:



⇒ Summiert man all diese Quader auf erhält man das „Volumen" von f auf A:



Wie rechet man in der Praxis?

Satz von Fubini: Doppelintegral = Zweimal hintereinander Integrieren (siehe Intuition oben).

Beispiel 5.2.19 (Fubini auf Quadern)
Betrachten wir eine stetige Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ über dem Rechteck $[0,1] \times [0,2]$. Dann gilt:

$$\int_0^1 \int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 \right) dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\bigg|_0^1 = 1$$

Man hätte auch zuerst nach x integrieren können:

$$\int_0^2 \int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^2 \left(y \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 \right) dy = \int_0^2 \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^2}{4}\bigg|_0^2 = 1$$

Beide Wege führen zum selben Ergebnis, was der Satz von Fubini garantiert.

Beispiel 5.2.21 (Fubini über einem Dreieck)
Sei D der dreieckige Bereich, der durch die Geraden $y = 0$, $y = x$ und $x = 1$ begrenzt wird. Wir berechnen

$$\int_D (x+y)\ \mathrm{dvol}$$

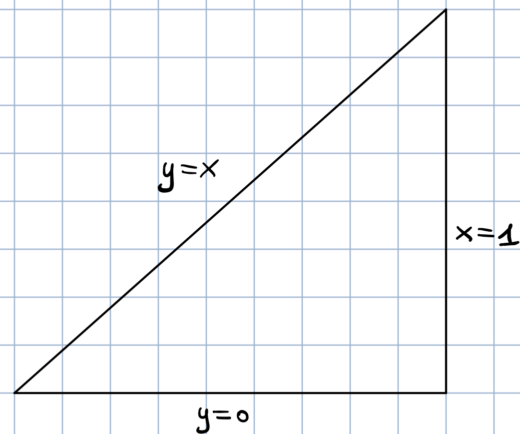
auf zwei Wegen, um den Satz von Fubini zu illustrieren.
Für festes $x \in [0,1]$ läuft y von 0 bis x:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Für festes $y \in [0,1]$ läuft x von y bis 1:

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 (x+y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_y^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

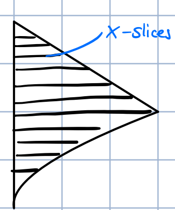
Der Satz von Fubini garantiert, dass beide Integrale denselben Wert liefern, da wir nur die Integrationsreihenfolge der Parameterintegrale vertauscht haben.



Integrationsreihenfolge vertauschen:

Wir möchten das folgende Integral umschreiben: $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

Wir wollen zuerst nach x und dann nach y integrieren.
Also zuerst x-Slices und dann y-Slices machen.
Wie sieht das Graphisch aus?



Dann werden diese x-Slices entlang y aufsummiert!

Man integriert von $x=0$ bis zur $y=\sqrt{x}$ Funktion. Also bis $x=y^2$. Das summiert man von $y=0$ bis 1 auf. Dann von $y=1$ bis 2 summiert man die x-Slices von $x=0$ bis $y=2-x$ also $x=2-y$ auf. $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} f\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f\,dx\,dy$ //